

文章编号: 1000-4874(2008)-03-0301-08

基于实测的三车道交通流扰动波 数值模拟研究*

朱辉, 吴正

(复旦大学力学与工程科学系, 上海 200433)

摘要: 在录像观测数据的基础上, 提出了更为符合实际的三车道不同车道间车辆换道的源汇项。在此基础上完善了三车道车辆换道的连续性方程, 并与动量方程一起组成完整的数学模型。对三车道扰动问题与单车道进行模拟比较, 发现扰动波传播速度几乎相同, 只是三车道扰动更容易衰减。对不同形式的三车道交通流数值模型进行对比分析后, 发现不同模型下扰动波的定性发展趋势几乎相同: 中低密度扰动幅度逐渐衰减, 中高密度扰动幅度有先衰减后增大的趋势, 且各向异性模型下扰动波幅度增大的趋势更强烈。

关键词: 交通流; 扰动波; 三车道; 数学模型; 数值模拟

中图分类号: TV131, U491.112 **文献标识码:** A

Numerical simulation on three-lanes traffic flow disturbance wave based on observation

ZHU Hui, WU Zheng

(Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: According to video data, the source and sink function of different vehicles changing lanes on the three-lane was proposed, that is more close to the real situation. On the basis of the function, the three-lane continuity equation was improved. Together with momentum equation, the three-lane continuum traffic model was set up. By comparing disturbance wave speed in three-lanes with that in single lane, there is little difference between them. But the fluctuation range in three-lane declines more quickly. Numerical results show that the models based on different source-sink item and momentum equation have similar characteristics. The fluctuation range under middle-lower vehicle density declines gradually, the fluctuation range under middle-higher vehicle density declines first and increases later, and the trend of amplitude grows much stronger in anisotropic model.

Key words: traffic flow; disturbance wave; three lanes; mathematical model; numerical simulation

* 收稿日期: 2007-11-26(2008-02-29 修改稿)

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10772050)

作者简介: 朱辉 (1982-), 男, 河南开封人, 硕士。

1 引言

交通问题历来是制约城市发展的关键问题，人们采用各种方法试图找到一条比较理想的解决交通问题的途径，通过交通流数学模型进行数值模拟是其中很重要的方法。在交通流研究的初期，人们主要研究的是单车道问题，采用宏观连续模型或元胞自动机模型对单车道交通流已经进行了相当多的研究^[1-8,19]。随着城市道路建设和交通流学科的发展，单车道交通流模型已经逐渐被多车道或网络交通流模型所替代。由于多车道交通存在车辆变道效应，三车道以上还可能出现车辆连续变道现象，使研究的复杂程度显著增大了。近年，人们已开始用交通流数值模型对双车道或三车道交通问题进行研究^[9-13,16]。本文从实测出发研究三车道扰动问题，从实地拍摄的交通录像中提取数据，建立新的连续性方程，与动量方程一起组成完整的宏观交通流数学模型，进而对三车道交通流扰动问题进行数值模拟和分析讨论。

2 数学模型和离散方法

考虑一个总长度 $L = 15 \text{ km}$ 的单向三车道高速公路，其中畅行速度 $u_f = 88.5 \text{ km/h}$ ，堵塞密度 $\rho_j = 143 \text{ veh/km}$ 。假定初始时刻在某一车道上，原来平稳的交通流受到干扰，局部密度出现变化，如图 1 所示。我们要研究的是这种扰动波的发展和演化规律。

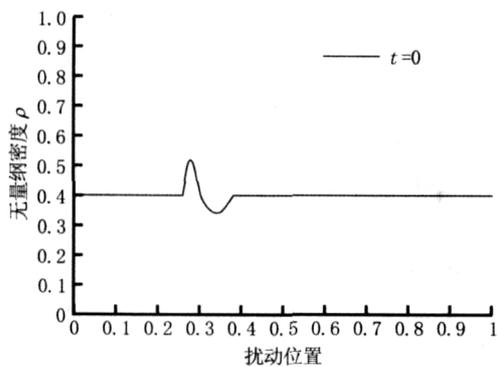


图 1 初始扰动的形式

2.1 连续性方程与源汇函数

宏观连续交通流模型的出发点是 Lighthill, Whitham^[14]以及 Richards^[15]分别单独提出的单车道连续性方程，后来人们称其模型为 LWR 模型：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

其中 ρ 、 u 分别为车辆的密度和速度， t 、 x 分别为时间和空间坐标。

对于多车道，由于车辆可能变道，导致上式右端需要增加源汇项，可以写成如下形式：

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = S_i, \quad i = 1, 2, \dots \tag{2}$$

其中 i 为从左到右的车道序号。

我们采用有限差分方法进行离散，连续性方程 (2) 离散后的形式为^[6,19]：

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_{i,j}^n (\rho_{i,j}^n - \rho_{i,j-1}^n) + \rho_{i,j-1}^n \cdot (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n)] + S_{i,j}^n \cdot \Delta t \tag{3}$$

其中： j 、 n 分别表示空间步和时间步。

Tang 等在研究两车道交通波问题时，提出了一种源汇项的表达式^[16]。如果将该表达式直接推广到三车道问题，那么可以写成如下形式：

$$S_{i,j}^n \cdot \Delta t = a_i \rho_{i,j}^n u_{i,j}^n \cdot \Delta t, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

其中： $a_i = \pm 0.01$ ，当本车道车辆密度小于相邻车道密度时，本车道上有车辆汇入， a_i 取正号，反之取负号。

我们认为，这样的源汇函数存在两个问题：首先，根据方程 (2) 两端量纲一致性要求，方程 (4) 中 a_i 的量纲应该是长度量纲的倒数，但实际上，对同样的流量，路段长度越长，则变道的概率也越大，所以 a_i 难以表现这种特征；其次，已有研究表明，对多车道路段而言，在同样的条件下车辆向左换道概率大约是向右换道概率的 4 倍^[17]，因此 a_i 也要有所不同。我们根据量纲一致性原则提出如下形式的源汇函数：

$$S_{1,j}^n \cdot \Delta t = \begin{cases} -k_1 \rho_{2,j}^n, & \text{当 } \rho_{1,j}^n > 0.55(\rho_{1,j}^n + \rho_{2,j}^n) \\ k_2 \rho_{1,j}^n, & \text{当 } \rho_{1,j}^n < 0.45(\rho_{1,j}^n + \rho_{2,j}^n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

$$S_{3,j}^n \cdot \Delta t = \begin{cases} -k_3 \rho_{2,j}^n, & \text{当 } \rho_{3,j}^n > 0.55(\rho_{3,j}^n + \rho_{2,j}^n) \\ k_4 \rho_{3,j}^n, & \text{当 } \rho_{3,j}^n < 0.45(\rho_{3,j}^n + \rho_{2,j}^n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

$$S_{2,j}^n \cdot \Delta t = -(S_{1,j}^n \cdot \Delta t + S_{3,j}^n \cdot \Delta t) \quad (7)$$

式(5)~(7)中 $k_1 \sim k_4$ 与车道和车辆密度有关。我们通过对北京、上海几个典型高速路段实地拍摄录像,从中提取大量数据资料进行分析后,按车辆密度把三车道交通流分为四种类型:

1. 低密度($0 \leq \rho < 0.1$),这里的 ρ 为无量纲密度,即实际密度与堵塞密度之比,下同),也就是每公里车辆数小于14辆。此时我们观测到车辆很少变道,所以 $k_1 \sim k_4$ 都可取为0。

2. 中低密度($0.1 \leq \rho < 0.3$),即每公里车辆数在14辆到43辆之间。此时我们观测到90米长的路段上三车道总的换道概率约为6%,结合文献[17]得 $k_i = \lambda_i \frac{\Delta x}{90}$ ($i=1, \dots, 4$),其中 Δx 为数值

模型中空间网格所对应的实际距离, $\lambda_1 \sim \lambda_4$ 分别取0.012, 0.048, 0.048, 0.012。

3. 中高密度($0.3 \leq \rho \leq 0.5$),即每公里车辆数在43辆到72辆之间。此时我们观测到90m长的路段上三车道总的换道概率约为3.6%,同样结合文献[17]得 $k_i = \lambda_i \frac{\Delta x}{90}$ ($i=1, \dots, 4$),其中 $\lambda_1 \sim \lambda_4$ 则分别取0.008, 0.028, 0.028, 0.008。

4. 高密度($0.5 < \rho \leq 1$),即每公里车辆数在72辆以上。观测发现这种情况下,虽然驾驶员存在强烈的变道加速欲望,但由于道路拥挤,车间距过小,使得车辆很难变道,因此实际变道概率也变得很低, $k_1 \sim k_4$ 也可以近似取为0。

2.2 动量方程与平衡函数

为了实现用连续模型模拟非平衡态的交通行为,Payne从Gazis与Herman跟驰模型^[18]出发,建立了各向同性动量方程^[19]。由于后来Daganzo等人^[20]发现由这种各向同性模型得到的解会存在车辆倒退等与事实不符的情况,又有人提出多种各向异性动量方程。本文以下采用Jiang等人^[3]提出的方程作为各向异性模型的代表进行讨论。对三车道交通

流,两种动量方程模型可以统一写成如下形式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{U_{e,i} - u_i}{Tr}, \quad i=1,2,3 \quad (8)$$

Payne模型方程即为

$$\varphi_i = C_0^2 \ln \rho_i, \quad i=1,2,3 \quad (9)$$

Jiang模型方程则为

$$\varphi_i = -C_0 u_i, \quad i=1,2,3 \quad (10)$$

方程(8)~(10)中 $U_{e,i}$ 为平衡函数, Tr 为反应时间, C_0 为等效音速(在两种类型的模型中 C_0 取值不相同)。

对于Payne模型采用FREFLO软件中使用的格式进行离散^[19],具体形式为:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_{i,j}^n (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) + \frac{C_0^2}{\rho_{i,j}^n} (\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j}^n)] + \frac{\Delta t}{Tr} (U_{e,i,j}^n - u_{i,j}^n) \quad (11)$$

对于Jiang模型采用迎风格式进行离散^[3],形式如下:

$$\begin{cases} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_0 - u_{i,j}^n)(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) + \frac{\Delta t}{Tr} (U_{e,i,j}^n - u_{i,j}^n), & \text{当 } u_{i,j}^n < C_0 \text{ 时} \\ u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_0 - u_{i,j}^n)(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) + \frac{\Delta t}{Tr} (U_{e,i,j}^n - u_{i,j}^n), & \text{当 } u_{i,j}^n \geq C_0 \text{ 时} \end{cases} \quad (12)$$

在单车道交通流数值模拟中,我们已经发现采用不同的平衡函数对计算结果影响非常大^[5,6]。为了研究在三车道的情况下这一结论是否仍然成立,以及不同平衡函数对扰动发展的影响特征,本文考虑以下三种平衡函数:

Payne平衡函数^[19]:

$$U_{e,i} = \min \{u_f, u_f [1.94 - 6 \frac{\rho_i}{\rho_j} + 8 \frac{\rho_i^2}{\rho_j^2} - 3.93 \frac{\rho_i^3}{\rho_j^3}]\} \quad i=1,2,3 \quad (13)$$

Lee 平衡函数^[21]:

$$U_{e,i} = u_f \frac{1 - \rho_i / \rho_j}{1 + 100 \rho_i^4 / \rho_j^4}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

KK 平衡函数^[22]:

$$U_{e,i} = u_f \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{\rho_i / \rho_j - 0.25}{0.06}}} - 0.00000372 \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

2.3 初始条件和边界条件

根据图 1 所描述的扰动形式, 我们初始条件为如下形式的扰动函数:

$$\rho_i(x, 0) = \begin{cases} \rho_{0,i} \left[1 - \beta \sin \frac{\pi(x - x_0)}{l_0} \right], & x_0 - l_0 \leq x \leq x_0 \\ \rho_{0,i} \left[1 + \frac{1}{2} \beta \sin \frac{\pi(x - x_0)}{2l_0} \right], & x_0 < x \leq x_0 + 2l_0 \\ \rho_{0,i}, & 0 < x < x_0 - l_0 \text{ 或} \\ & x_0 + 2l_0 < x < L \end{cases} \quad (16)$$

其中: $\rho_{0,i}$ 为初始均匀车流密度, β 为扰动强度。因为我们假设扰动只发生在某一车道上, 所以 (16) 式只对 $i = 1, 2, 3$ 中的一个值成立, 另外两个车道仍有 $\rho_i(x, 0) = \rho_{0,i}$ 。

又假定初始时刻速度与密度之间满足 Greenshields 模型:

$$u_i(x, 0) = u_f \left[1 - \frac{\rho_i(x, 0)}{\rho_j} \right], \quad i = 1, 2, 3 \quad (17)$$

为了让有限长的路段能够模拟实际上更长的道路, 在边界条件上采用一端循环边界条件, 另一端齐次 Neumann 条件^[5,6]。即扰动波向下游传播, 当 $t > 0$ 时有:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial x}(1, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(1, t) = 0 \\ \rho_i(0, t) = \rho_i(1, t), & i = 1, 2, 3 \\ u_i(0, t) = u_i(1, t) \end{cases} \quad (18)$$

扰动波向上游传播, 当 $t > 0$ 时有:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \rho_i(1, t) = \rho_i(0, t), & i = 1, 2, 3 \\ u_i(1, t) = u_i(0, t) \end{cases} \quad (19)$$

由于本节所列的这些定解条件是 Dirichlet 条件或齐次 Neumann 条件, 离散比较简单, 这里不再列出。

3 计算结果的分析与讨论

如前所述, 根据车辆变道概率的显著不同, 可以按车辆密度分为四种情况, 其中低密度和高密度时车辆变道发生都很少, 所以这两种情况下三车道交通流就相当于三个单车道交通流, 本文中不再展开讨论。我们在中低密度 (以 $\rho = 0.1, 0.2$ 为代表) 和中高密度 (以 $\rho = 0.3, 0.4, 0.5$ 为代表) 情况下, 对单车道与三车道、三车道两种源汇函数模型、两种动量方程模型及平衡函数等不同工况分别进行计算, 并就计算结果进行分析比较。计算时无量纲时间步长取 $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$, 无量纲空间步长取 $\Delta x = 0.00233$, 相当于实际时间步长 $\Delta t = 4.3 \text{ s}$, 实际空间步长 $\Delta x = 35$ 。

3.1 三车道模型与单车道模型计算结果的比较

由于三车道离散模型是在单车道的基础之上发展起来的, 我们有必要对三车道与单车道在扰动波的传播与发展问题上做一个比较。在单车道时, 文献[6]得到了采用 Payne 模型时不同初始密度条件下扰动波的传播速度, 表 1 给出了我们采用 Payne 模型对三车道计算得到的相应结果及两者的比较 (扰动发生在中间车道上), 图 2 和图 3 则给出了两者的扰动波发展变化过程。

从表 1 可以看出, 对于扰动传播速度, 单车道与三车道差别很小, 几乎可以忽略不计。另外, 从扰动波幅值的发展来看, 以 $\rho = 0.2$ 为例, 两者的波幅都呈逐渐衰减的趋势, 但单车道扰动波幅衰减的速度比三车道扰动波衰减的速度慢。图 2 显示三车道扰动发生在中间车道上后, 以很快的速度衰减, 而图 3 显示同样强度的单车道扰动波的衰减速度相对比较慢, 这说明本文模型能够反映车道数增多有利于交通拥堵的缓解这一实际现象。

表 1 单车道与三车道扰动传播速度对照表

初始密度	$\rho=0.1$ (14vel/km)	$\rho=0.2$ (28vel/km)	$\rho=0.3$ (43vel/km)	$\rho=0.4$ (57vel/km)	$\rho=0.5$ (72vel/km)
单车道	82.2 km/h	70.9 km/h	35.7 km/h	8.1 km/h	4.8 km/h
三车道	81.4km/h	70.3km/h	36.8km/h	8.3km/h	5.3km/h

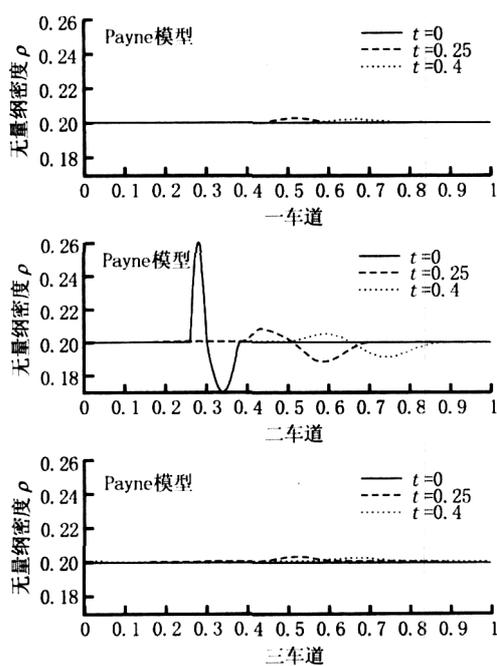


图 2 三车道扰动的发展情况

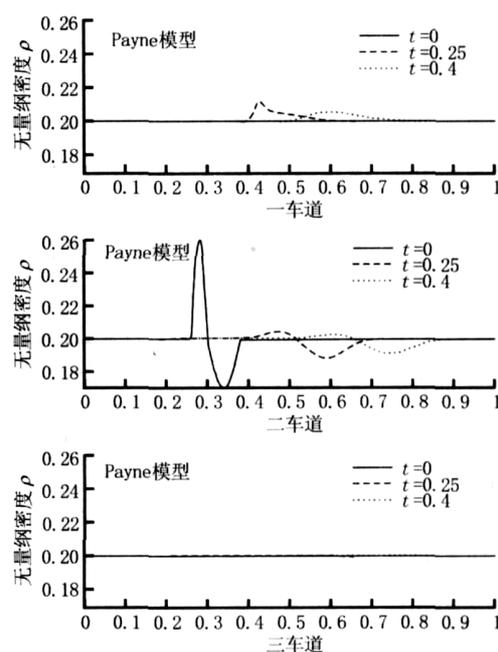


图 4 Payne 模型扰动发展情况

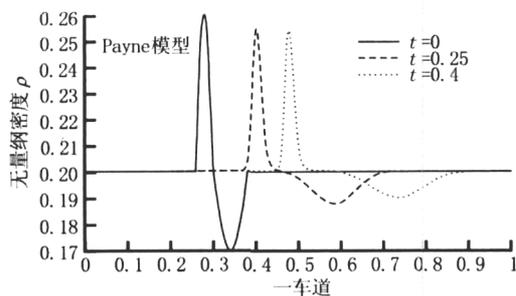


图 3 单车道扰动的发展情况

间车道上。图 2 就是采用源汇函数 (4) 计算得到的结果, 图 4 则是采用源汇函数 (5) ~ (7) 计算得到的相应结果。对比两图可以发现: 在同样的初始密度和扰动强度下, 用两种源汇函数计算得到的扰动波传播速度差别很小, 扰动波发展的趋势也几乎相同; 但用源汇函数 (5) ~ (7) 计算结果显示扰动对左侧车道影响的程度强于用源汇函数 (4), 而对右侧车道影响程度要弱于源汇函数 (4)。由此可知, 在模拟实际上左右变道不均匀的多车道交通流问题时, 用本文新建立的基于实测数据的源汇函数模型具有明显的优势。

3.3 Jiang 模型与 Payne 模型下扰动传播与发展的特征比较

在连续性方程都取本文提出的源汇函数 (5) ~ (7) 的基础上, 又对动量方程分别采用 Payne 各向同性模型和 Jiang 各向异性模型进行计算。图 4 和图 6 分别是初始密度 $\rho = 0.2$ 和 0.4 时 Payne 模

3.2 两种源汇函数在模拟结果上的比较

在动量方程都取 Payne 模型的基础上, 对连续性方程分别包含式 (4) 和式 (5) ~ (7) 这两种不同源汇函数的模型进行计算, 扰动仍发生在中

型计算得到的结果，图5和图7则是Jiang模型计

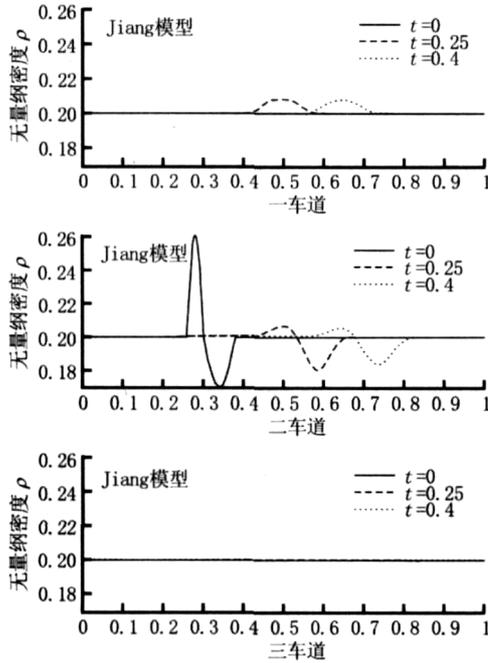


图5 Jiang模型扰动发展情况

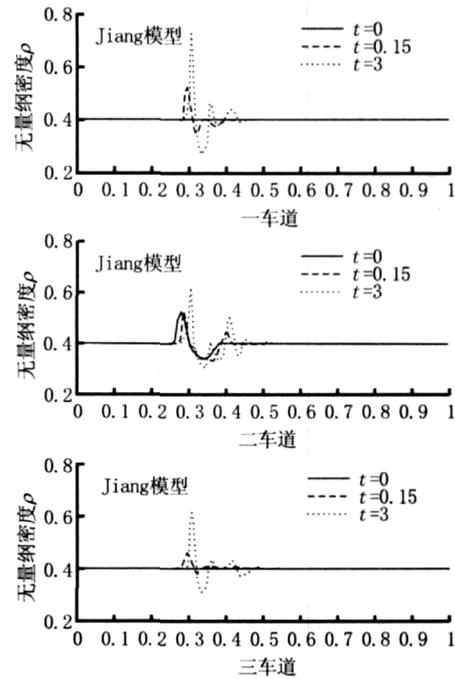


图7 Jiang模型扰动发展情况

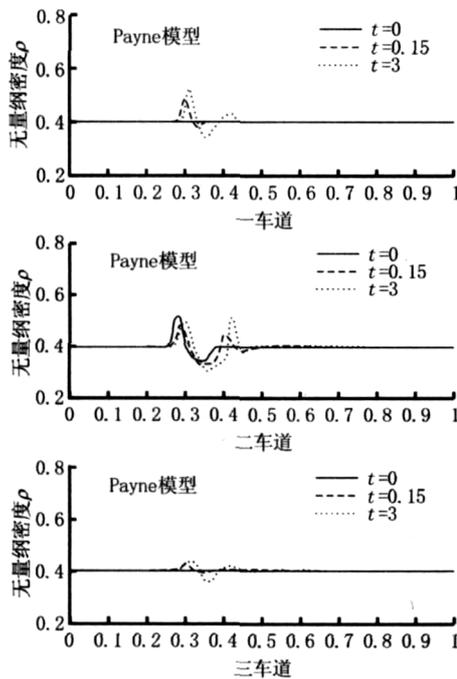


图6 Payne模型扰动发展情况

算得到的相应结果，扰动都发生在中间车道上，且都采用Payne平衡函数。

从图中可以看出：首先，Payne模型和Jiang模型在同一初始密度下得到的扰动传播速度和影响

范围基本上是一致的，说明各向异性模型并没有表现出明显的优势，这和我们在单车道问题中得到的结论相同^[6]。其次，在中低密度条件下，两种模型数值模拟的结果扰动均向下游传播同时逐步衰减，对右侧车道的的影响非常小可以忽略不计，对左侧车道有一定影响，但其最大幅度不会超过本车道。这说明车辆为中低密度时，两种模型都能反映拥堵不容易发生，某一车道上出现的扰动会逐渐消失的实际情况。再其次，在中高密度条件下，数值模拟的结果扰动也向下游传播，幅值先衰减再逐步增大，对两侧车道都有比较明显的影响，并且两侧车道的扰动幅值有可能超过本车道。各向异性模型下扰动对两侧车道的影响更为显著，随时间增长甚至有发散的趋势。说明车辆为中高密度时，当某一车道上出现扰动后，容易引发车辆的拥堵，这也与观测结果一致。

3.4 扰动对其他车道产生影响所需的扰动强度条件

一般而言，只有当车道上出现一定强度的扰动时才会对相邻或更远的车道产生影响。由于平衡函数对扰动发展的影响比较显著^[5,6]，所以我们尤其关心在不同平衡函数下，某一车道上发生的扰动对其他车道产生影响所需扰动强度 β 的条件。我们以初始扰动发生车道以外的车道上密度变化5%作为依据判断它是否受到扰动的影响，即当被干扰车道车辆密度增加或减少5%视为受到扰动的影响。以初

表 2 Payne 模型下扰动对其他车道产生影响的条件

扰动发生车道	平衡函数	第一车道 (受影响车道)	第二车道 (受影响车道)	第三车道 (受影响车道)
第一车道	KK	Origin	0.04	0.05
第一车道	Lee	Origin	0.13	0.22
第一车道	Payne	Origin	0.40	0.58
第二车道	KK	0.04	Origin	0.05
第二车道	Lee	0.12	Origin	0.14
第二车道	Payne	0.40	Origin	0.44
第三车道	KK	0.05	0.04	Origin
第三车道	Lee	0.20	0.12	Origin
第三车道	Payne	0.52	0.40	Origin

表 3 Jiang 模型下扰动对其他车道产生影响的条件

扰动发生车道	平衡函数	第一车道 (受影响车道)	第二车道 (受影响车道)	第三车道 (受影响车道)
第一车道	Payne	Origin	0.28	0.42
第二车道	Payne	0.28	Origin	0.28
第三车道	Payne	0.41	0.28	Origin

始密度 $\rho = 0.2$ 为例, 在 Payne 模型下, 扰动对其他车道产生影响 β 要满足的条件如表 2 所示。

相应的, 在 Jiang 模型下, 扰动对其他车道产生影响 β 要满足的条件如表 3 所示。

对比计算结果我们不难发现: 当车辆为中低密度时, 各向异性模型计算扰动对其它车道产生影响所需的扰动强度比各向同性模型要小; 在 Payne 模型下, 扰动对其它车道产生影响, Payne 平衡函数所需的扰动强度最大, Lee 平衡函数次之, KK 平衡函数最小; 在 Jiang 模型下, 用 Payne 平衡函数扰动对其它车道产生影响但不会出现数值发散, 用 KK 或 Lee 平衡函数则会在较短的时间内出现数值发散。

4 结语

本文从实测出发建立了新的包含源汇函数的连续性方程, 与动量方程一起组成完整的宏观交通流数学模型, 进而对中低密度和中高密度条件下三车道交通流扰动问题进行了数值模拟, 对单车道与三车道、两种源汇函数模型、两种动量方程模型及平衡函数等不同工况的计算结果进行分析比较, 得

到以下几点结论:

(1) 不同初始密度的三车道交通流中扰动波的传播速度都与单车道基本相同, 但扰动波传播过程中其幅值比单车道时更容易衰减, 表明车道数的增加有利于缓解交通压力。

(2) 在中低密度条件下, 扰动向下游传播同时逐步衰减, 对右侧车道的的影响非常小可以忽略不计, 对左侧车道有一定影响, 但其最大幅度不会超过本车道, 反映此时拥堵不容易发生。在中高密度条件下, 扰动也向下游传播, 幅值先衰减再逐步增大, 对两侧车道都有比较明显的影响, 并且两侧车道的扰动幅值有可能超过本车道, 各向异性模型下扰动对两侧车道的影响更为显著, 说明此时某一车道上出现的扰动容易引发整个路段车辆的拥堵。

(3) 在模拟实际上左右变道不均匀的多车道交通流问题时, 用本文新建立的源汇函数模型具有明显的优势。

(4) Payne 模型和 Jiang 模型在同一初始密度下得到的扰动传播速度和影响范围基本一致, 各向异性模型没有表现出明显的数值模拟优势, 这和单车道问题中得到的结论相同。

(5) 计算扰动对其它车道产生影响所需的扰动强度, 发现各向异性模型比各向同性模型要小, 在

同一模型下, Payne 平衡函数又比 KK 或 Lee 平衡函数要小。

参 考 文 献:

- [1] ZHANG H M. Analyses of the stability and wave properties of a new continuum traffic theory[J]. *Transpn. Res. B*, 1999, 33: 399-415.
- [2] ZHANG Ya-ping, PEI Yu-long. Research on traffic flow forecasting model based on cusp catastrophe theory[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2004, 01: 1-5
- [3] JIANG R, et al. A new continuum model for traffic flow and numerical tests[J]. *Transpn. Res. B*, 2002, 36: 405-419.
- [4] JIN W L, et al. The formation and structure of vehicle clusters in the Payne - Whitham traffic flow model[J]. *Transpn. Res. B*, 2003, 37: 207-223.
- [5] 许谦, 吴正. 自由项对交通流双曲型方程组数值解影响研究[J]. *水动力学研究与进展, A 辑*, 2006, 21 (4) : 538-543.
- XU Qian, WU Zheng. The influence of free term on the numerical solution of nonlinear first order hyperbolic equations[J]. *Journal of Hydrodynamics, Ser.A*, 2006, 21(4):538-543.
- [6] 吴正. 关于交通流中扰动波传播和发展的数值模拟[J]. *力学学报*, 2006, 38(6): 785-791.
- WU Zheng. On the numerical simulation of perturbation's propagation and development in traffic flow[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(6):785-791
- [7] 汪茂林, 吴正. 高速公路交通事故和干涉车流波的数值模拟[J]. *水动力学研究与进展, A 辑*, 2001, 16(3): 265-273.
- WANG Mao-lin, WU Zheng. On the numerical simulation for expressway incident and intervention traffic-flow wave. *Journal of Hydrodynamics, Ser.A*, 2001, 16(3):265-273.
- [8] 董力耘, 薛郁, 戴世强. 基于跟车思想的一维元胞自动机交通流模型[J]. *应用数学和力学*, 2002, 23(4): 331-337.
- DONG Li-yun, XUE Yu, DAI Shi-qiang. One-dimensional cellular automaton model of traffic flow based on car-following idea[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(4): 331-337.
- [9] 叶品, 钟诚文, 李兵强. 基于快慢车辆主动换道特性的双车道元胞自动机模型研究[J]. *交通与计算机*, 2007, 25(1):86-89.
- YE Pin, ZHONG Cheng-wen, LI Bing-qiang. Two-lane cellular automata traffic model based on the characteristic of initiative lane change of fast and slow vehicles[J]. *Traffic and Computer*, 2007, 25(1):86-89.
- [10] KNOSPE W, et al. A realistic two-lane traffic model for highway traffic[J]. *J. of Physics A*, 2002, 35: 3369-3388.
- [11] 吴可非, 孔令江, 刘慕仁. 双车道元胞自动机 NS 和 WWH 交通流混合模型的研究[J]. *物理学报*, 2006, 55(12): 6275-6280.
- WU Ke-fei, KONG Ling-jing, LIU Mu-ren. The study of a cellular automaton NS and WW H mixed model for traffic flow on a two-lane roadway[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(12): 6275-6280.
- [12] 吴大艳, 谭惠丽, 孔令江, 等. 三车道元胞自动机交通流模型研究[J]. *系统工程学报*, 2005, 20(4): 393-397.
- WU Da-yan, TAN Hui-li, KONG Ling-Jiang, et al. Study on a three-lane cellular automata traffic flow model[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2005, 20(4): 393-397.
- [13] 吴大艳. 三车道有管理元胞自动机交通流模型的研究[J]. *安徽工业大学学报*, 2007, 24(1): 117-121.
- WU Da-yan. Study on a Three-lane Controlled Cellular Automata Traffic Model[J]. *Journal of Anhui University of Technology*, 2007, 24(1): 117-121.
- [14] Lighthill M J, et al. On kinematic waves: A theory of traffic flow on long crowded roads[C]. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1955, 22: 317-345.
- [15] RICHARDS P I, et al. Shock waves on the highway[J]. *J. Opns. Res.*, 1956, 4: 42-51.
- [16] TANG T, et al. Continuum models for freeways with two lanes and numerical tests[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2004, 49: 2097-2104.
- [17] 裴玉龙, 张亚平. 交通系统仿真技术[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
- FEI Yu-long, ZHANG Ya-ping. Simulation of Traffic System[M], Beijing: China Communication Press, 2002.
- [18] GAZIS D C, et al. Car-following theory of steady-state traffic flow[J]. *J. Opns. Res.*, 1961, 9: 545-567.
- [19] PAYNE H J. FREFLO: A macroscopic simulation model of freeway traffic[J]. *Transpn. Res. R*, 1979, 772: 68-75.
- [20] DAGANZO C F. Requiem for second-order approximations of traffic flow[J]. *Transpn. Res. B*, 1995, 29: 277-286.
- [21] LEE H Y, et al. Origin of synchronized traffic flow on highways and its dynamic phase transitions[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81: 1130-1133.
- [22] KERNER B S, et al. Cluster effect in initially homogeneous traffic flow[J]. *Phys. Rev. E*, 1993, 48: 2335-2338.